線形汎関数を用いた再生核ヒルベルト空間の特徴づけ

— 「カーネル多変量解析」（岩波書店）６章補足 —

赤穂 昭太郎

July 17, 2009

ここでは，関数解析のことばを使って再生核ヒルベルト空間が非常に一般的な関数の線形空間のクラスであることを説明する．

まず関数解析の基礎概念の一つである線形汎関数を定義しよう[1]．

線形汎関数 ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ があったとき，$\mathcal{H}$ に対する線形汎関数 L とは，$f \in \mathcal{H}$ から実数への写像 $L(f)$ であり，任意の実数 a, b および任意の $f, g \in \mathcal{H}$ に対し，

$$L(af + bg) = aL(f) + bL(g)$$

という線形関係を満たすものである．

線形汎関数による関数表現 さて，入力空間 $\mathcal{X}$ があったとき，その各要素 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ ごとに線形汎関数 L_x があったとしよう．

L_x を作用させることによって $f \in \mathcal{H}$ は値 $L_x(f)$ をもつ．これは $\boldsymbol{x}$ に対する f の値とみなせるから $L_x(f)$ を $f(\boldsymbol{x})$ と書くことにする．

主要定理 $\mathcal{X}$ の各点 $\boldsymbol{x}$ ごとにヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に対する線形汎関数 L_x があったとする．このとき，$\mathcal{H}$ が再生核ヒルベルト空間である，すなわち再生核 $k(\cdot, \boldsymbol{x}) \in \mathcal{H}$ が存在し，

$$f(\boldsymbol{x}) = \langle f, k(\cdot, \boldsymbol{x}) \rangle_{\mathcal{H}}$$

が任意の f について成り立つための必要十分条件は任意の $\boldsymbol{x}$ に対して L_x が $\mathcal{H}$ 上で連続となることである．

[1]本稿でも関数解析の基礎概念のいくつかを説明するが詳細については基本的な関数解析の入門書を参照のこと．

補足説明　ここで主要定理を理解するための関数解析の基礎概念をまとめる．

連続性 線形汎関数 L が連続というのは，直感的には互いに近い $f, g \in \mathcal{H}$ があったとき，$L(f)$ と $L(g)$ も近くなることである．厳密には ϵ-δ 記法を使って書ける．

ノルム 線形汎関数のノルムを

$$\|L\| = \sup_{\|f\|_{\mathcal{H}}=1} |L(f)|$$

と定義する．(f のノルムは $\mathcal{H}$ で定義される $\|f\|_{\mathcal{H}} = \langle f, f\rangle_{\mathcal{H}}$)

有界性 ノルムが有界である線形汎関数を有界線形汎関数という．関数解析で重要な帰結として「有界性と連続性は等価」という事実がある．

以下の定理は線形汎関数を内積と結びつける重要な定理である．

リース (Riesz) の表現定理 線形汎関数が連続 (つまり有界) なら，$g \in \mathcal{H}$ が存在し，任意の f に対して

$$L(f) = \langle f, g\rangle_{\mathcal{H}}$$

という内積の形に書ける．

主要定理の証明　リースの表現定理から最初に述べた定理を証明するのはたやすい．まず，連続性およびリースの表現定理より，各 $\boldsymbol{x}$ ごとに

$$f(x) = L_x(f) = \langle f, g_x\rangle_{\mathcal{H}}$$

となる $g_x \in \mathcal{H}$ が存在する．$\boldsymbol{x}' \in \mathcal{X}$ に対しても同様に $g_{x'}$ が存在し，$g_x(x') = L_{x'}(g_x) = \langle g_x, g_{x'}\rangle_{\mathcal{H}}$ であり，これを $k(x', x)$ とおけば

$$f(x) = \langle f, k(\cdot, x)\rangle_{\mathcal{H}}$$

という主要定理の式を得る．